Trilce
ACADEMIA

Curso:

Física

Tema:

Vectores 2

Ciclo:

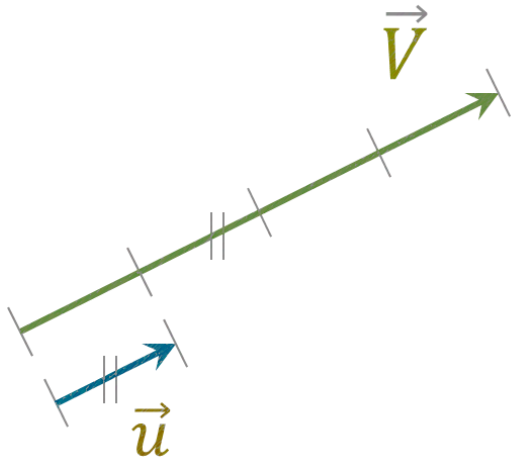
Anual

Semana:

2

Vectores Unitarios

Un **vector unitario** o **versor** es aquel vector cuyo módulo es la unidad.
Si $\vec{V}$ es un vector cuyo módulo $V \neq 0$, entonces un vector unitario $\vec{u}$ teniendo la misma dirección del $\vec{V}$ es representado por:



$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{V} \cdots\cdots \text{Vector Unitario del } \vec{V} \quad , \quad |\vec{u}| = u = 1$$

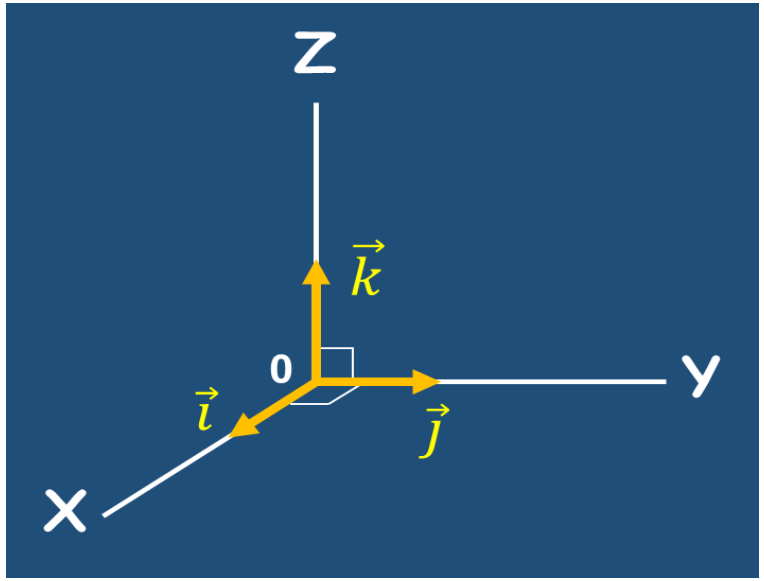
$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{V} = V\vec{u}}$$

Como se ve, todo vector puede representarse como el producto de su módulo y su vector unitario.

Trilce ACADEMIA

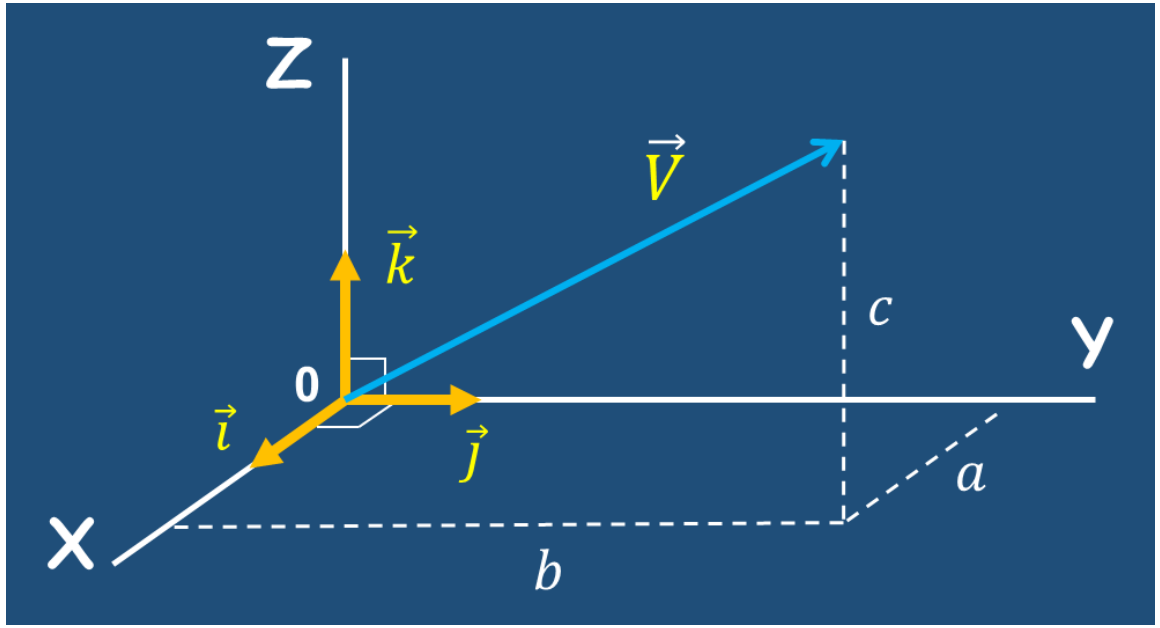
Vectores Unitarios en el Sistema Rectangular de Coordenadas X, Y, Z

Para simplificar las operaciones en el algebra vectorial, se hace uso de los vectores unitarios (o versores), $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ los cuales serán usados para definir las direcciones positivas de los ejes rectangulares **X**, **Y**, **Z**.



$\rightarrow \quad \vec{i} \neq \vec{j} \neq \vec{k}$

$\rightarrow \quad i = j = k = 1$

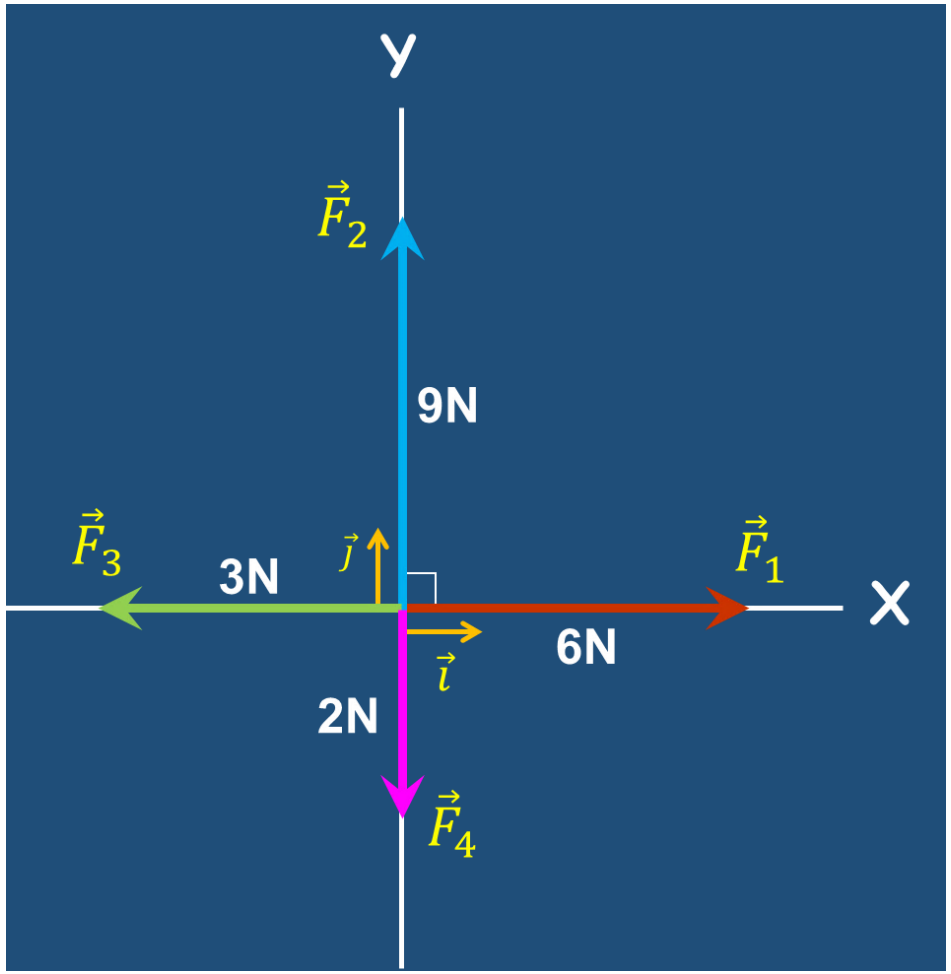


$$\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = (a; b; c)$$

$$V = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \ldots\ldots\ldots \textit{Módulo}$$

Trilce ACADEMIA

Ejemplos en 1D :



Como sabemos: $\vec{V} = V\vec{u}$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_1 = 6\text{N}(+\vec{i}\,) \quad = +\,6\vec{i}\,\text{N} \quad = (6;0)\,\text{N}$$

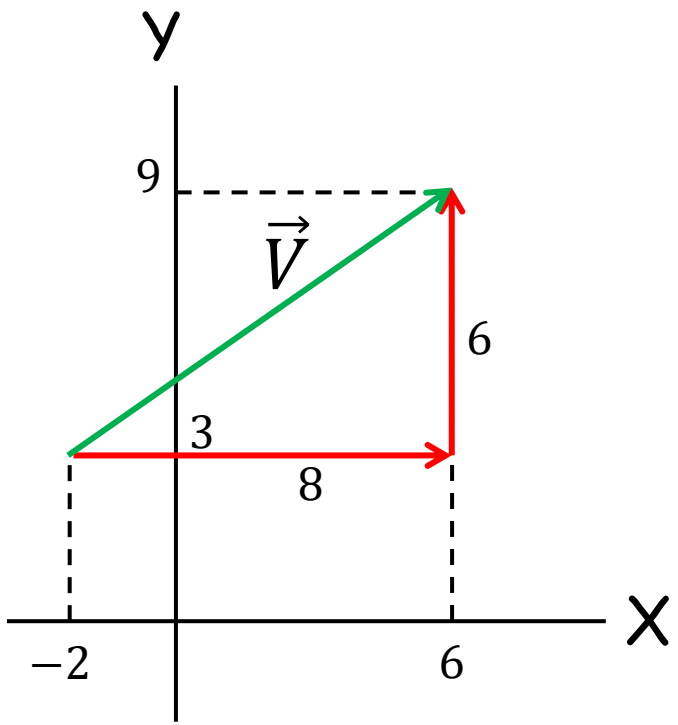
$$\Rightarrow \quad \vec{F}_2 = 9\text{N}(+\vec{j}\,) \quad = +9\vec{j}\,\text{N} \quad = (0;9)\,\text{N}$$

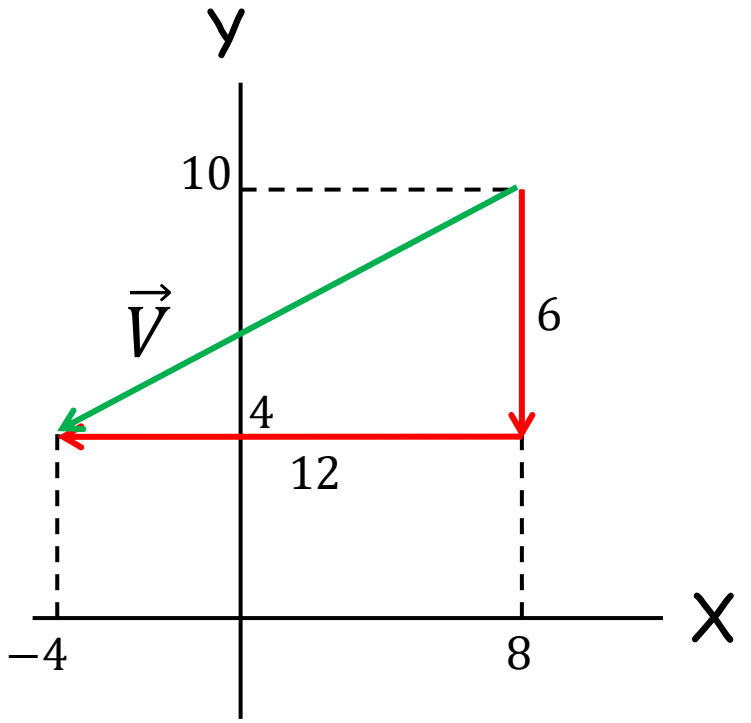
$$\Rightarrow \quad \vec{F}_3 = 3\text{N}(-\vec{i}\,) \quad = -3\vec{i}\,\text{N} \quad = (-3;0)\,\text{N}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_4 = 2\text{N}(-\vec{j}\,) \quad = -2\vec{j}\,\text{N} \quad = (0;-2)\,\text{N}$$

Trilce ACADEMIA

Ejemplos en 2D:



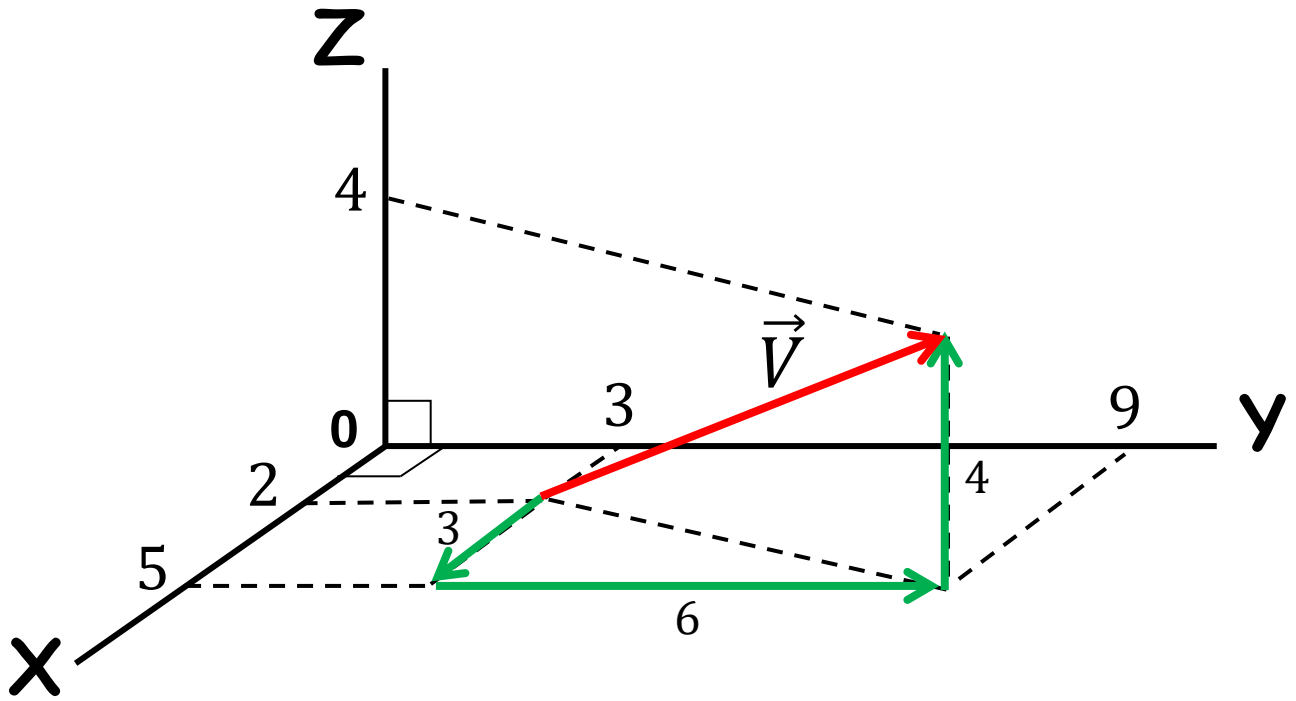


$\vec{V} = 8\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} = (8; 6)$

$\vec{V} = -12\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} = (-12; -6)$

Trilce
ACADEMIA

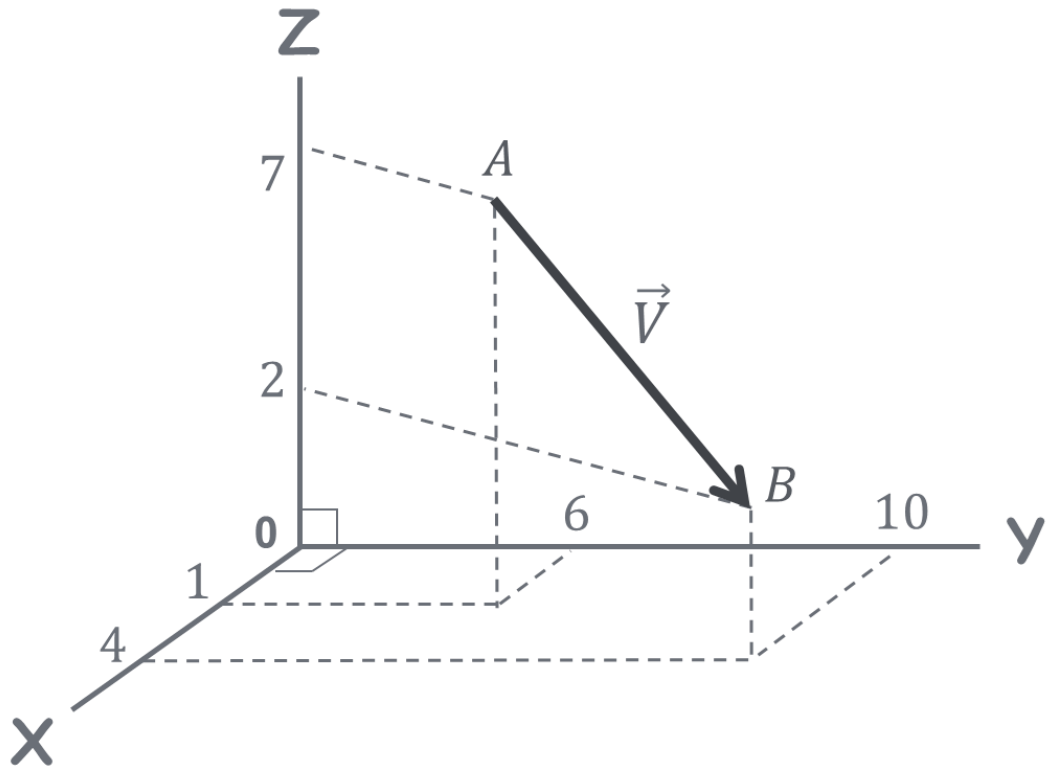
Ejemplo en 3D:



$$\vec{V} = 3\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 4\vec{k} = (3; 6; 4)$$

Trilce
ACADEMIA

Propiedad:



Se cumple:

$$\vec{V} = \overrightarrow{AB} = B - A$$

De la figura:

$$\Rightarrow \quad \vec{V} = (4\ ;10\ ;2) - (1\ ;6\ ;7)$$

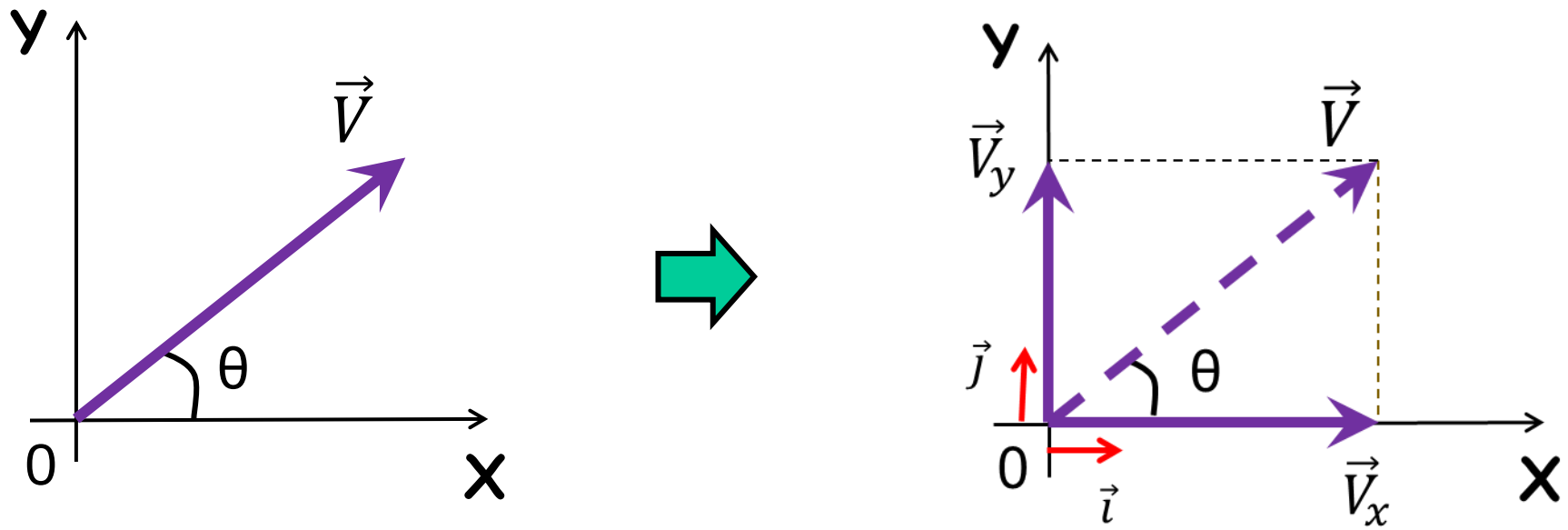
$$\vec{V} = (3\ ;4\ ;\ -5)$$

$$\vec{V} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 5\vec{k}$$

Trilce ACADEMIA

Método de Descomposición Rectangular (Para n vectores)

Descomponer rectangularmente un vector $\vec{V}$ es representarlo sobre los ejes rectangulares, donde cada uno de los cuales será llamado componente rectangular del vector $\vec{V}$.



Siendo:

$$V_x = V\cos\theta$$

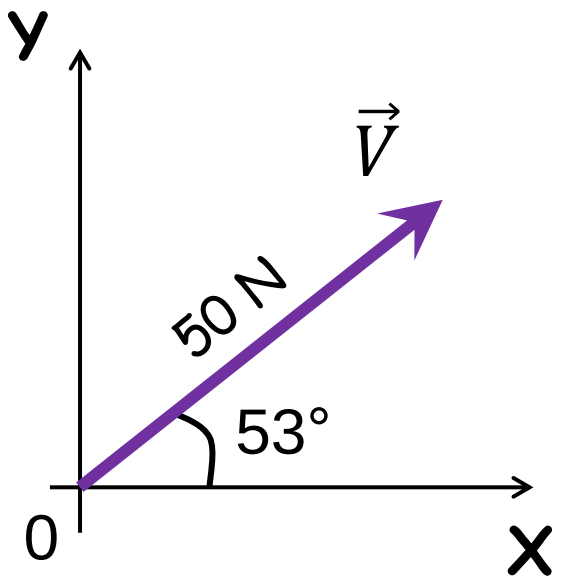
$$V_y = V\,\text{sen}\,\theta$$

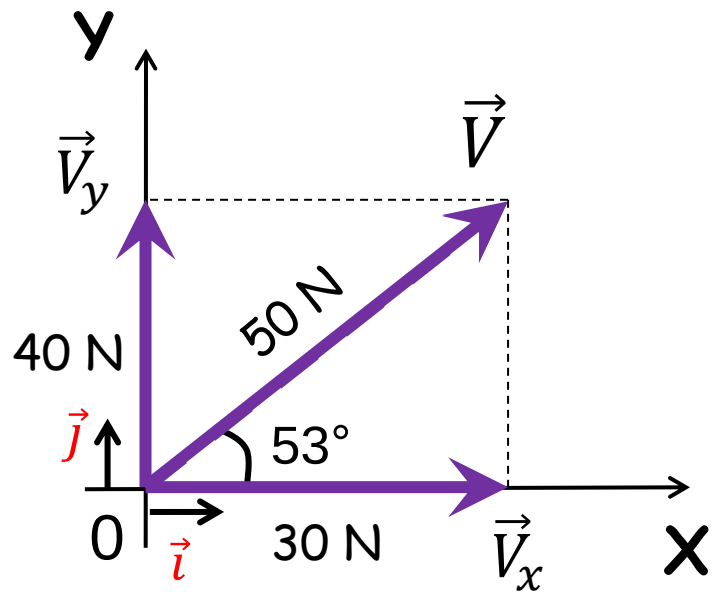
Como: $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j}$

Trilce ACADEMIA

Ejemplo:

Sea:



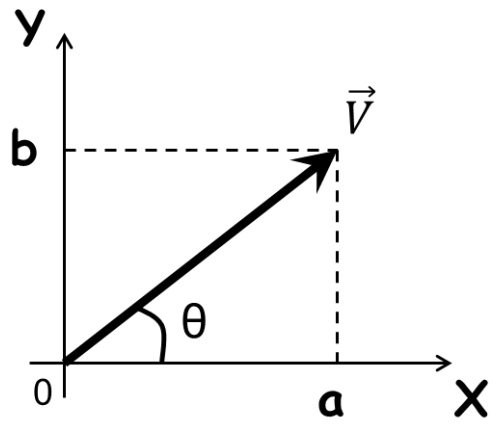


Como:

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y \implies \vec{V} = 30\text{N}\,\vec{i} + 40\text{N}\,\vec{j} \therefore \boxed{\vec{V} = (30\,\vec{i} + 40\,\vec{j})\text{N}}$$

Trilce ACADEMIA

En general, si:



$$\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} = (a\ ;\ b)$$

$$\Rightarrow \quad V = \sqrt{a^2 + b^2} \ldots\ldots\ldots \textit{Módulo}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{b}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots \textit{Dirección}$$

Obs.:

Si: $\vec{V} = 4\vec{i} - 3\vec{j} \ = \ 4\vec{i} + (-3)\vec{j} \ = (4; -3)$

Es decir: $a = 4 \quad \wedge \quad b = -3$

Propiedad:

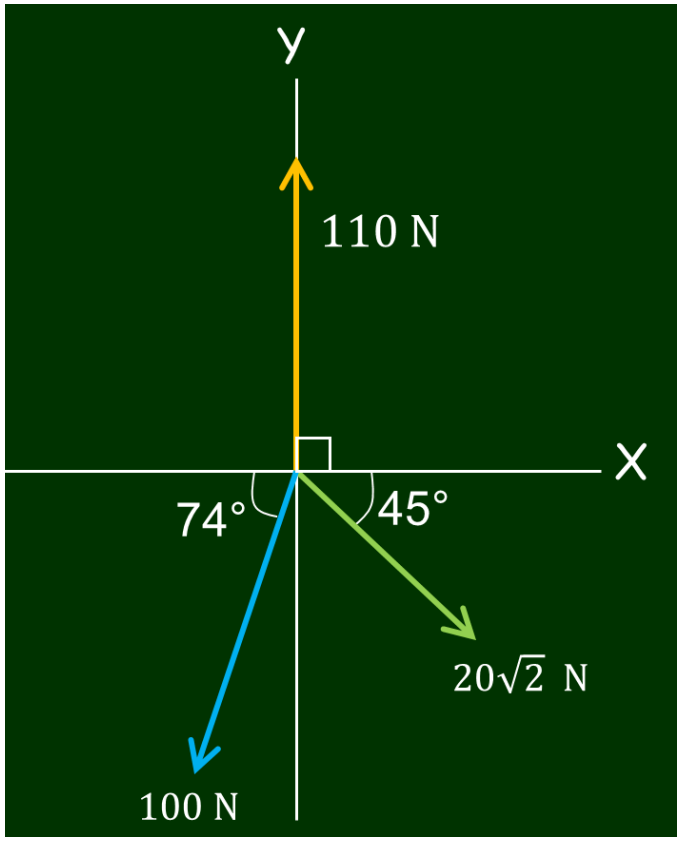
De la figura, el vector unitario del vector $\vec{V}$, seria:

$$\vec{u} = (\cos\theta\ ;\ \operatorname{sen}\theta)$$

Trilce ACADEMIA

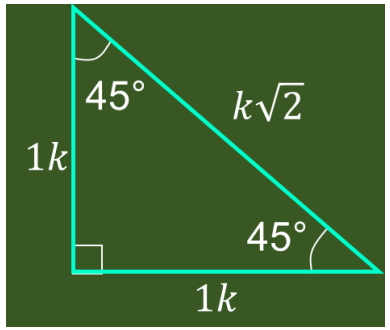
Ejemplo:

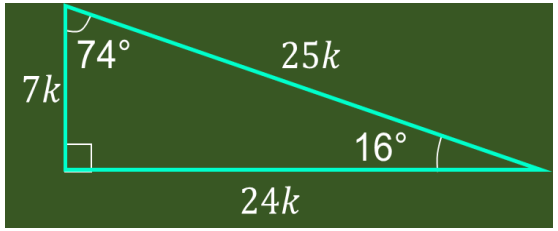
En el sistema de vectores mostrado, determine el vector resultante ($\vec{R}$), su módulo (R) y dirección (θ).



Resolución :

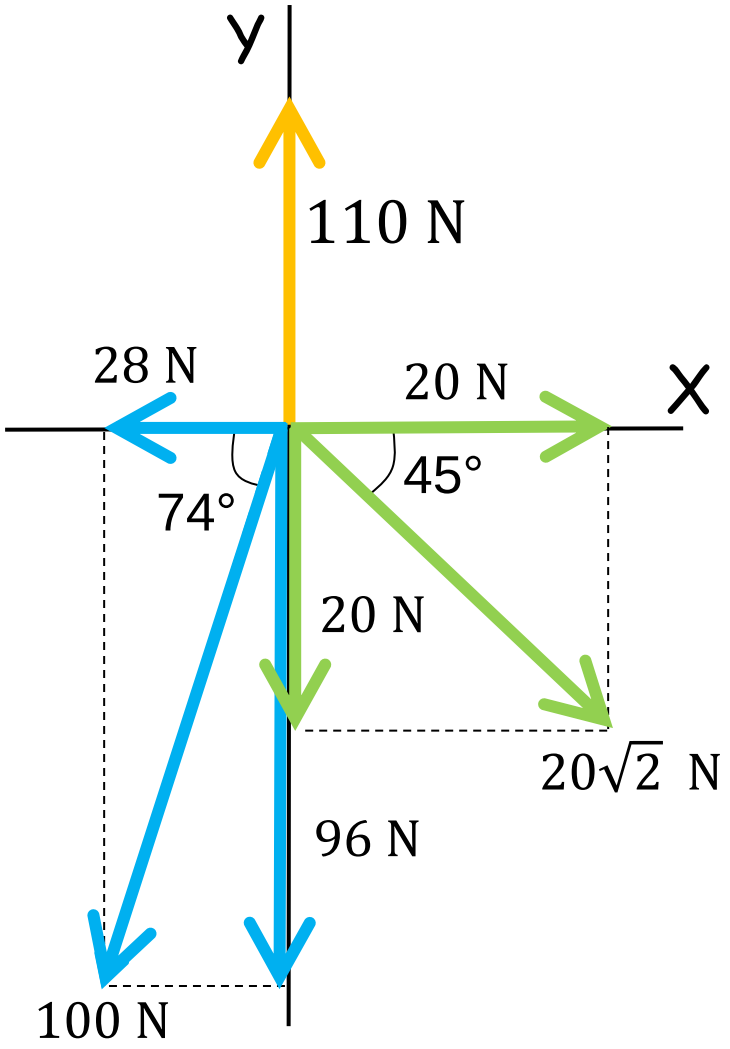
Es muy importante tener siempre presente los triángulos rectángulos notables:





Trilce
ACADEMIA

1° Descomponemos los vectores sobre los ejes rectangulares



2° Calculamos la resultante

$$\vec{R} = (20\vec{\imath} - 28\vec{\imath} + 110\vec{\jmath} - 20\vec{\jmath} - 96\vec{\jmath})\text{N}$$

$$\boxed{\vec{R} = (-8\vec{\imath} - 6\vec{\jmath})\text{N}} \quad \text{o} \quad \boxed{\vec{R} = (-8; -6)\text{N}}$$

3° Ahora el módulo de la resultante

$$R = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2}$$

$$R = \sqrt{100}$$

$$\boxed{R = 10\ \text{N}}$$

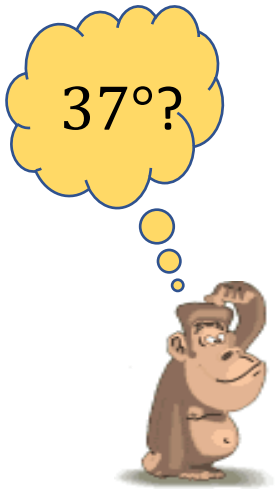
Trilce ACADEMIA

4° Finalmente la dirección

Como: $\vec{R} = (-8; -6)\text{N}$

Se sabe:

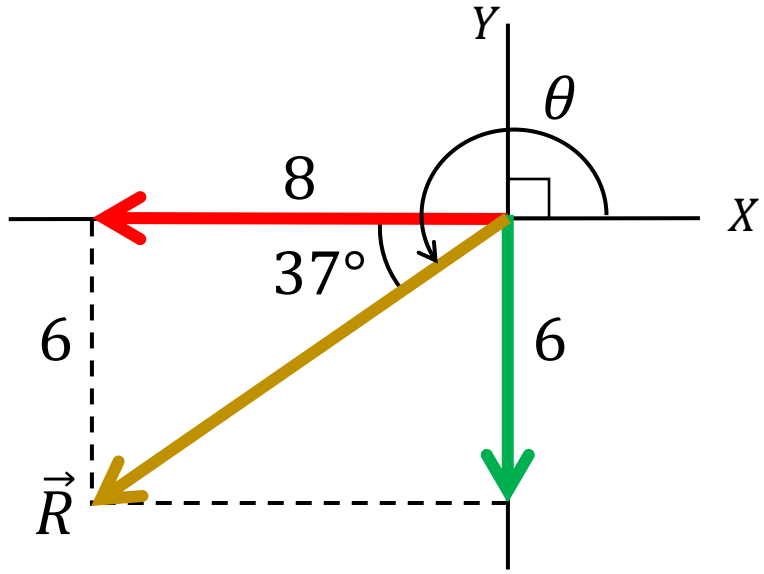
$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$



$$\tan\theta = \frac{-6}{-8}$$

$$\tan\theta = \frac{3}{4}$$

Graficamos:



Se ve:

$$\theta = 180° + 37°$$

$$\boxed{\theta = 217°}$$

o $\boxed{\theta = -143°}$

Trilce ACADEMIA

La posición de un punto en el espacio es un vector, pues es necesario establecer, además de la distancia a la que el punto se encuentra del origen de un sistema de coordenadas, la dirección y sentido en que esta distancia debe ser medida. Entonces, ¿en qué cuadrante o cuadrantes del sistema de coordenadas rectangulares se encuentra la suma resultante de los vectores $\vec{A} = (2;4), \vec{B} = (-4;2), \vec{C} = (3;-7)$? (UNMSM 2017 - I)

A) IV cuadrante B) III y II cuadrantes C) III cuadrante D) I y IV cuadrantes E) I cuadrante

Resolución:

Se sabe:

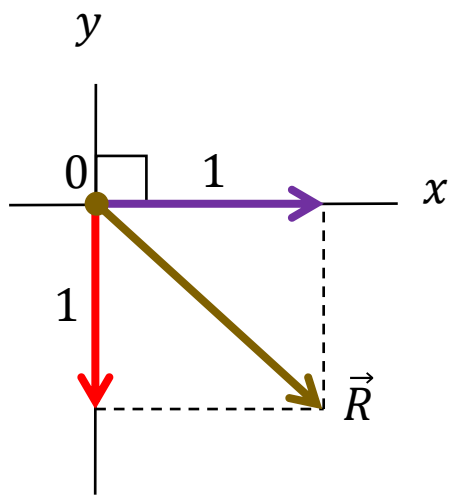
$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

Remplazamos:

$$\vec{R} = (2;4) + (-4;2) + (3;-7)$$

$$\vec{R} = (1;-1)$$

Graficamos:



Se ve:

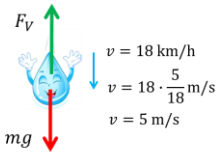
$\vec{R} \in$ IV cuadrante

Trilce ACADEMIA

PROBLEMAS RESUELTOS

Resolución:

Se tiene:



$v = 18\ \text{km/h}$

$v = 18 \cdot \frac{5}{18}\ \text{m/s}$

$v = 5\ \text{m/s}$

Del equilibrio:

$F_V = mg$

$k \cdot V^2 = mg$

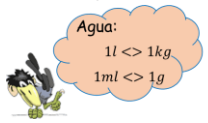
$k = \frac{mg}{V^2}$

$k = \frac{(\frac{1}{20} \cdot 10^{-3}) \cdot (10)}{5^2}$

$k = \frac{10^{-3}}{50}$

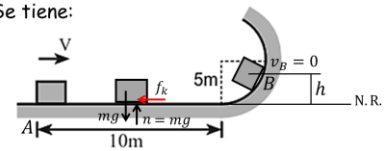
$\boxed{k = 2 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{m}^2}}$

Tener presente:



Resolución:

Se tiene:



La E_M no se conservará:

$\Rightarrow \quad E_{MA} + W_{fnc} = E_{MB}$

$\frac{1}{2}mv^2 + W_{f_k} = mgh$

$\frac{1}{2}mv^2 - f_k \cdot s = mgh$

$\frac{1}{2}mv^2 - \mu_k \cdot n \cdot s = mgh$

$\frac{1}{2}mv^2 - \mu_k \cdot mg \cdot s = mgh$

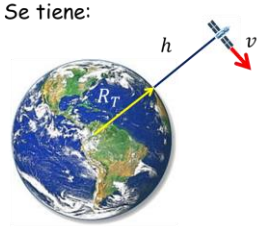
$h = \frac{v^2}{2g} - \mu_k \cdot s$

$h = \frac{10^2}{2 \cdot 10} - 0{,}2 \cdot 10$

$\boxed{h = 3\ \text{m}}$

Resolución:

Se tiene:



Se sabe:

$v = \omega \cdot R$

$v = \omega \cdot (R_T + h)$

$7{,}5 \cdot 10^3 = \omega \cdot (6400 + 1000) \cdot 10^3$

$7{,}5 = \omega \cdot 7400$

$\omega = 7{,}5/7400 = \frac{7{,}5}{7{,}4 \cdot 10^3} = 1{,}01 \cdot 10^{-3}\ \text{rad/s}$

$\boxed{\omega = 10^{-3}\ \text{rad/s}}$

Resolución:

Sabemos que: $E = m \cdot c^2$

$\rightarrow \quad m = \frac{E}{c^2} = \frac{18\,000 \cdot 1\,000 \cdot 4\,000\,000}{(3 \times 10^8)^2} = 8 \times 10^{-4}\ \text{kg}$

$\boxed{m = 0{,}8\ \text{g}}$

Resolución:

Se sabe: $x_0 = A \operatorname{sen} \varphi_0$

$0 = 6{,}24 \operatorname{sen} \varphi_0$

$\operatorname{sen} \varphi_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_0 = 0\ \text{rad};\ \pi\ \text{rad}$

Como: $v_0 = \omega A \cos \varphi_0$

$v_0 = 2\pi f \cdot A \cdot \cos 0$

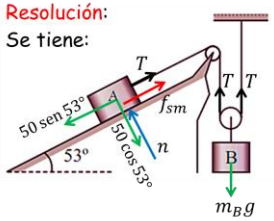
$v_0 = 2\pi \cdot 3{,}2 \cdot 6{,}24 \cdot 1$

$v_0 = 125{,}46\ \text{cm/s}$

$\boxed{v_0 \approx 1{,}25\ \text{m/s}}$

Resolución:

Se tiene:



Del equilibrio:

A: $n = 50\cos 53°$

$n = 50 \cdot 3/5$

$n = 30\text{N}$

A: $T + f_{sm} = 50\operatorname{sen}53°$

$T + \mu_s \cdot n = 50\operatorname{sen}53°$

$T + 0{,}5 \cdot 30 = 50 \cdot 4/5$

$T + 15 = 40$

$T = 25\ \text{N}$

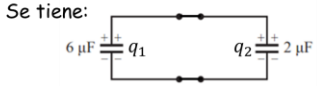
B: $m_B g = 2T$

$m_B g = 2 \cdot 25$

$\boxed{m_B g = 50\ \text{N}}$

Resolución:

Se tiene:



Se cumple: $q_1 + q_2 = 12\ \mu\text{C} \ldots\ldots\ldots (1)$

También: $V_1 = V_2$

$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$

$\frac{q_1}{6} = \frac{q_2}{2}$

$q_1 = 3q_2$

En (1): $3q_2 + q_2 = 12\ \mu\text{C}$

$\boxed{q_2 = 3\ \mu\text{C}}$

Resolución:

Se sabe:

$\lambda_{mín} = \frac{12390}{U}$

$\lambda_{mín} = \frac{12390}{45{,}54 \times 10^3}$

$\lambda_{mín} = 0{,}272\ \text{Å}$

$\lambda_{mín} = 0{,}272 \times 10^{-10}\ \text{m}$

Como: $f = \frac{c}{\lambda}$

$\rightarrow \quad f = \frac{c}{\lambda_{mín}}$

$f = \frac{3 \times 10^8}{0{,}272 \times 10^{-10}}$

$f = 11 \times 10^{18}\ \text{Hz}$

$\boxed{f = 1{,}1 \times 10^{19}\ \text{Hz}}$

Resolución:

Se tiene: $\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 = 25\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_r = 25 \\ \mu = \mu_r \mu_0 = 4\mu_0 \rightarrow \mu_r = 4 \end{cases}$

Se sabe: $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{25 \cdot 4}} = \frac{3 \times 10^8}{10}$

$v = 3 \times 10^7\ \text{m/s}$

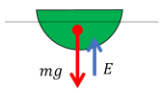
Como: $v = \lambda \cdot f \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{v}{f}$

$\lambda = \frac{3 \times 10^7}{6 \times 10^6}$

$\boxed{\lambda = 5\ \text{m}}$

Resolución:

Se ve:



$E = mg$

$\rho_{agua} \cdot g \cdot V_S = \rho_c \cdot V_c \cdot g$

$1000 \cdot g \cdot 2V/3 = \rho_c \cdot V \cdot g$

$\rho_c = \frac{2000}{3}\ \text{kg/m}^3$

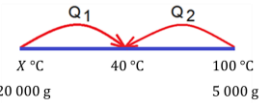
Como: $m_c = \rho_c \cdot V_c$

$m_c = \rho_c \cdot \frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi r^3)$

$m_c = \frac{2000}{3} \cdot \frac{1}{2}(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0{,}06^3)$

$\boxed{m_c = 0{,}096\pi\ \text{kg}}$

Resolución:



$\sum Q = 0$

$Q_1 + Q_2 = 0$

$m_1 \cdot c_1 \cdot (T_{Eq} - T_1) + m_2 \cdot c_2 \cdot (T_{Eq} - T_2) = 0$

$20000 \cdot 1 \cdot (40 - X) + 5\,000 \cdot 1 \cdot (40 - 100) = 0$

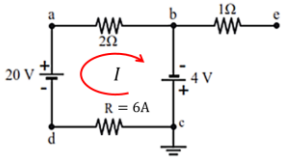
$4 \cdot (40 - X) + 1 \cdot (40 - 100) = 0$

$160 - 4X - 60 = 0$

$\boxed{X = 25\ °\text{C}}$

Resolución:

Se tiene:



Se cumple: $\sum \varepsilon = \sum (I \cdot R)$

$20 + 4 = I \cdot 2 + I \cdot 6$

$I = 3\ \text{A}$

Se sabe: $P = I^2 \cdot R$

$P = 3^2 \cdot 6$

$\boxed{P = 54\ \text{W}}$

Resolución:

Se sabe: $v = \frac{E}{B}$

$E = v \cdot B$

$E = 6 \times 10^5 \cdot 1{,}5$

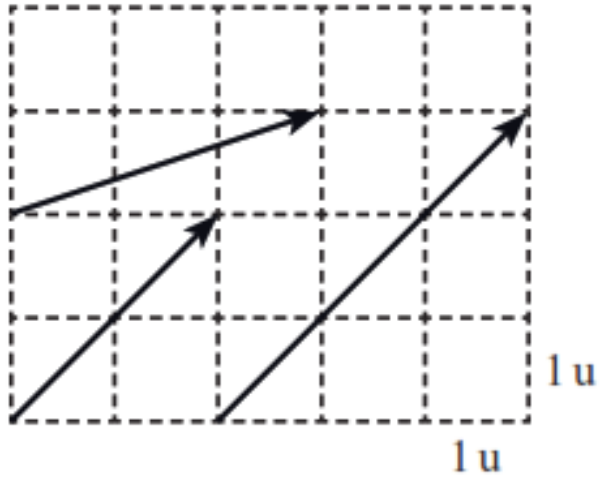
$E = 9 \times 10^5\ \text{N/C}$

$E = 900 \times 10^3\ \text{N/C}$

$\boxed{E = 900\ \text{kN/C}}$

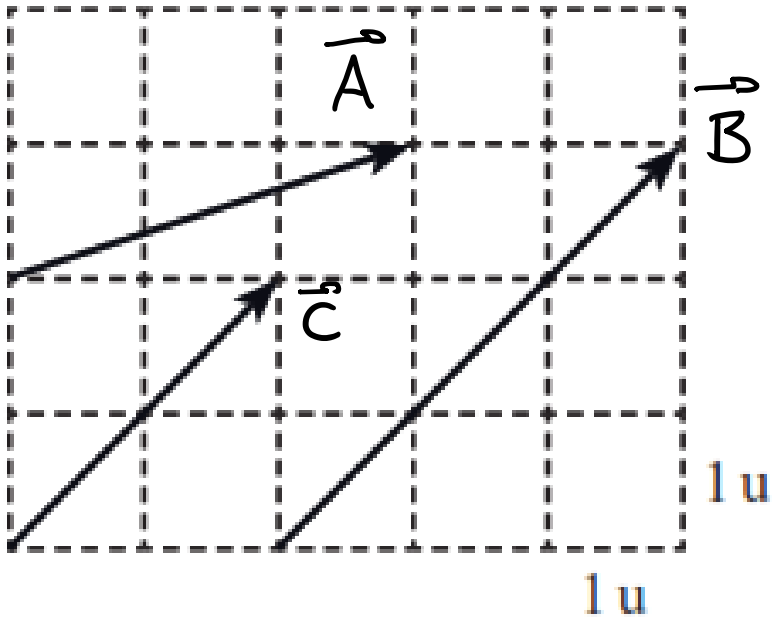
Trilce ACADEMIA

41. Calcule el módulo de la resultante de los vectores que se muestran en la figura.



a) 8 u b) 10 u c) 6 u
d) 5 u e) 9 u

Resolución:



$\vec{A} = (3;1)$

$\vec{B} = (3;3)$

$\vec{C} = (2;2)$

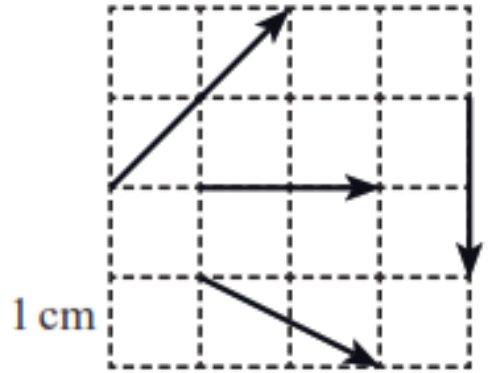
$\vec{R} = (8;6)$ ⊕

$R = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{100}$

$R = 10$ u

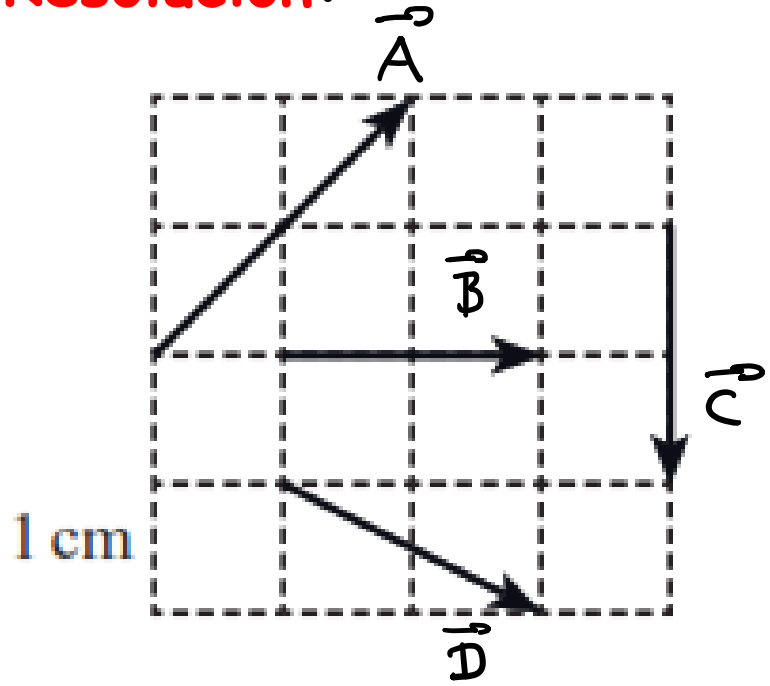
Trilce ACADEMIA

42. Para el sistema de vectores que se muestra, determine la magnitud del vector resultante.



a) $\sqrt{41}$ cm
b) $\sqrt{29}$ cm
c) $\sqrt{35}$ cm
d) $\sqrt{37}$ cm
e) $2\sqrt{10}$ cm

Resolución:



$\vec{A} = (2;2)$

$\vec{B} = (2;0)$

$\vec{C} = (0;-2)$

$\vec{D} = (2;-1)$

$\vec{R} = (6;-1)$

GO

$R = \sqrt{6^2 + (-1)^2}$

$R = \sqrt{37}$ cm

Trilce ACADEMIA

43. Dados los vectores:

$\vec{A} = (2; 5)$ y $\vec{B} = (6; -10)$.

El vector unitario de $3\vec{A} + \vec{B}$ es:

a) $\frac{12i + 5j}{13}$

b) $\frac{12i - 5j}{13}$

c) $\frac{-12i + 5j}{13}$

d) $\frac{-12i - 5j}{13}$

e) $\frac{5i + 12j}{13}$

Resolución:

$$3\vec{A} + \vec{B} = 3(2;5) + (6;-10)$$

$$= (6;15) + (6;-10)$$

$$3\vec{A} + \vec{B} = (12;5)$$

Yo sé: $\vec{U} = \frac{\vec{V}}{V}$

$$\Rightarrow \vec{U} = \frac{3\vec{A} + \vec{B}}{|3\vec{A} + \vec{B}|} = \frac{(12;5)}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{(12;5)}{\sqrt{169}} = \frac{(12;5)}{13}$$

OO $\quad \vec{U} = \frac{12i + 5j}{13}$

Trilce ACADEMIA

44. Determine el módulo del vector

$$\vec{A} = 3i - 2j + 4k.$$

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{7}$ c) $\sqrt{13}$

d) $\sqrt{21}$ e) $\sqrt{29}$

Resolución:

Se ve: $\vec{A} = (3; -2; 4)$

$$A = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}$$

$$A = \sqrt{9 + 4 + 16}$$

$$A = \sqrt{29}$$

Trilce ACADEMIA

45. Determine el módulo del vector $\vec{A}+\vec{B}$, siendo $\vec{A} = i + 2j + 2k$ y $\vec{B} = (1; 0; 3)$.

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{11}$ c) $\sqrt{13}$
d) $\sqrt{21}$ e) $\sqrt{33}$

Resolución:

$$\vec{A} + \vec{B} = (1; 2; 2) + (1; 0; 3)$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (2; 2; 5)$$

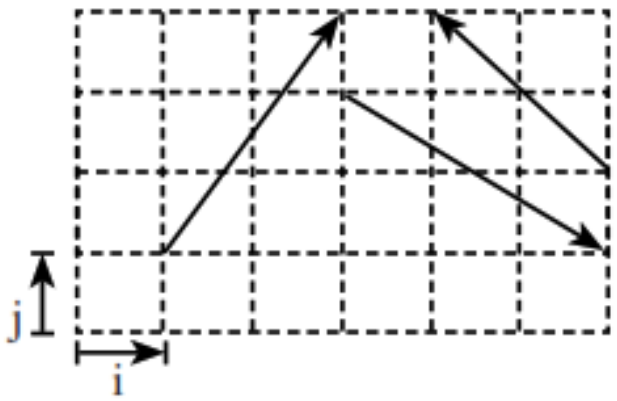
$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{4 + 4 + 25}$$

$$= \sqrt{33}$$

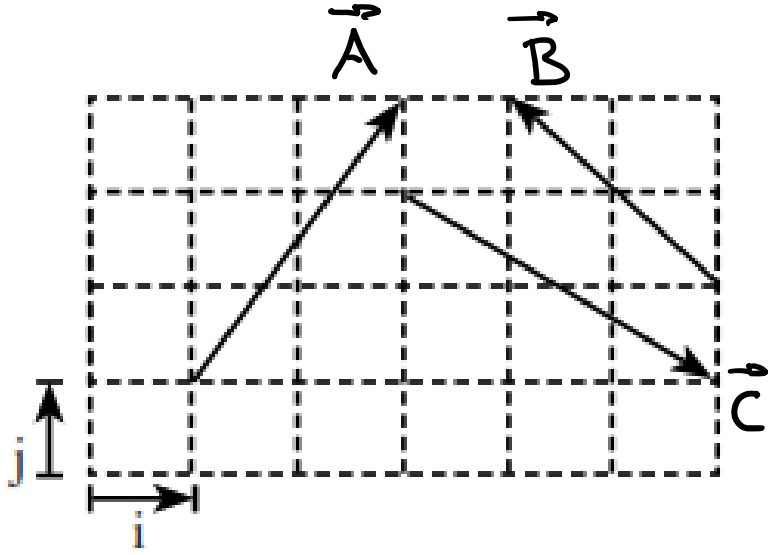
Trilce ACADEMIA

46. Determine la suma de los vectores mostrados.



a) $(2\vec{i}+\vec{j})$ u
b) $(2\vec{i}+3\vec{j})$ u
c) $(3\vec{i}+3\vec{j})$ u
d) $(\vec{i}+2\vec{j})$ u
e) $(4\vec{i}+3\vec{j})$ u

Resolución:



$\vec{A} = (2;3)$

$\vec{B} = (-2;2)$

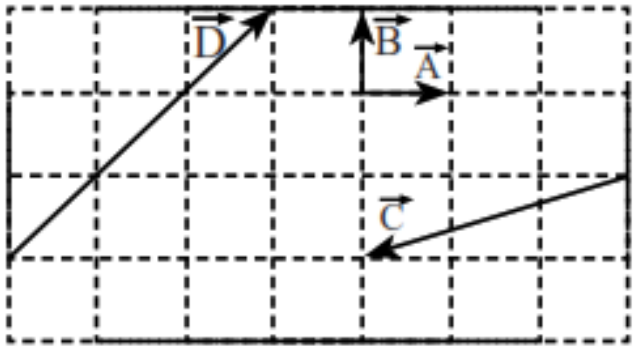
$\vec{C} = (3;-2)$ ⊕

$\vec{R} = (3;3)u$

$\vec{R} = (3\vec{i}+3\vec{j})u$

Trilce ACADEMIA

47. Determine si las proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F) e indique la secuencia correcta.



I. $\vec{D} = m\vec{A} + n\vec{B}$; entonces m = 2 y n = 5

II. $\vec{C} = m\vec{A} + n\vec{B}$; entonces m = 3 y n = 1

III. $\vec{C} + \vec{D} = m\vec{B}$; entonces m = 2

a) VFV b) FFF c) FFV
d) FVV e) VVV

Resolución:

Sea: $\vec{A} = (1;0)$; $\vec{B} = (0;1)$

$\vec{C} = (-3;-1)$; $\vec{D} = (3;3)$

I. (F); pues $\vec{D} = m\vec{A} + n\vec{B}$

$(3;3) = m(1;0) + n(0;1) = (m;0) + (0;n)$

$(3;3) = (m;n) \Rightarrow m = 3,\ n = 3$

II. (F); pues $\vec{C} = m\vec{A} + n\vec{B}$

$(-3;-1) = (m;n) \Rightarrow m = -3,\ n = -1$

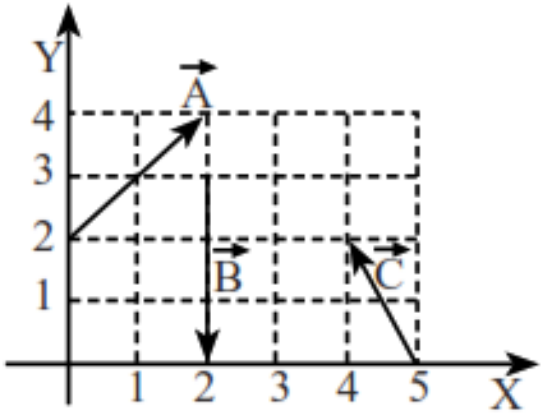
III. (V) $\vec{C} + \vec{D} = m\vec{B}$

$(-3;-1) + (3;3) = m(0;1)$

$(0;2) = (0;m) \Rightarrow m = 2$

Trilce ACADEMIA

48. A partir del siguiente sistema de vectores, calcule el módulo del vector resultante.



a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}$
d) 1 e) $\sqrt{10}$

Resolución:

Se ve:

$\vec{A} = (2;2)$
$\vec{B} = (0;-3)$
$\vec{C} = (-1;2)$ ⊕

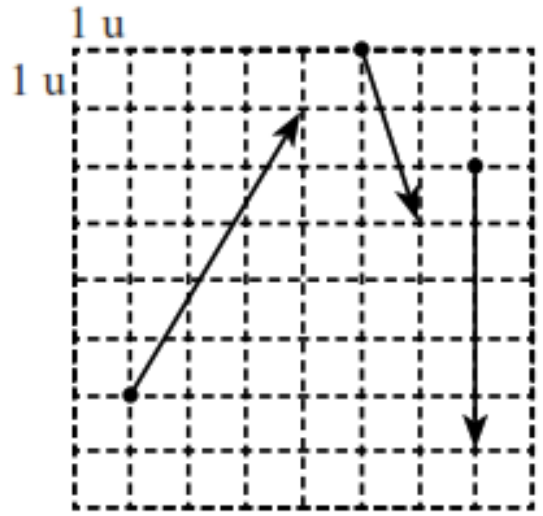
$\vec{R} = (1;1)$

$R = \sqrt{1^2+1^2}$

$R = \sqrt{2}$

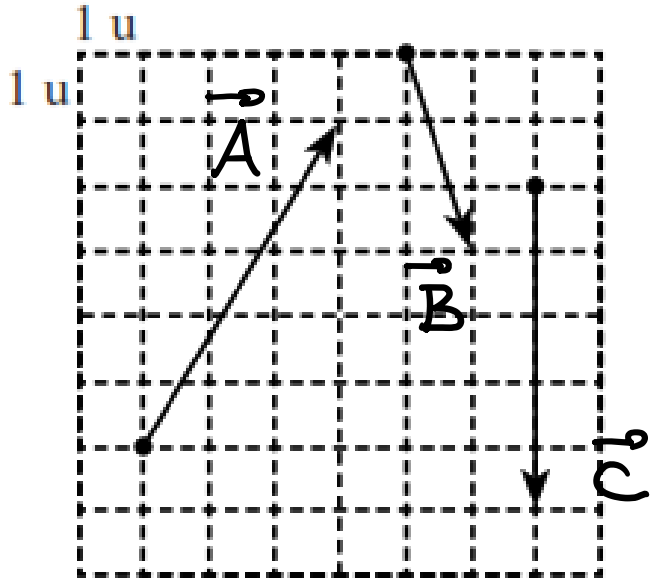
Trilce ACADEMIA

49. Calcule el módulo de la resultante de los vectores mostrados.



a) 4 u b) 6 u c) 5 u
d) 7 u e) 3 u

Resolución:



$$\left.\begin{array}{l} \vec{A} = (3;5) \\ \vec{B} = (1;-3) \\ \vec{C} = (0;-5) \end{array}\right\} +$$

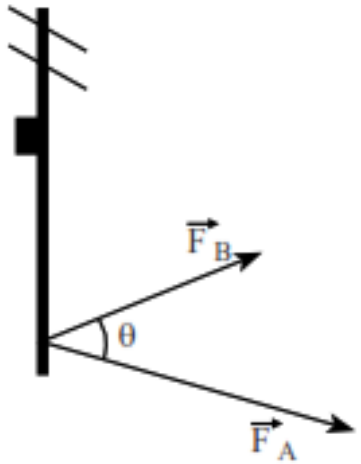
$$\vec{R} = (4;-3)$$

08 $R = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25}$

$R = 5$

Trilce ACADEMIA

50. Dos personas A y B jalan horizontalmente las cuerdas atadas a un poste vertical. Las cuerdas forman entre sí un ángulo de $\theta = 45°$, como muestra la figura. Las magnitudes de las fuerzas que ejercen las personas A y B en las cuerdas son F_A y F_B respectivamente y están en la relación $F_A/F_B = 3/2\sqrt{2}$. Determine la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre el poste sabiendo que $F_A = 1500$ N. (Utilice la escala 1 cm ≡ 500 N)



a) $100\sqrt{28}$ N
b) $500\sqrt{29}$ N
c) $300\sqrt{24}$ N
d) $400\sqrt{20}$ N
e) $200\sqrt{26}$ N

Resolución:

Se sabe: $\frac{F_A}{F_B} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1500\,N}{F_B} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow F_B = 1500N \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$F_B = 1000\sqrt{2}\ N$

$\therefore F_R = \sqrt{F_A^2 + F_B^2 + 2 \cdot F_A \cdot F_B \cdot \cos\theta}$; $\theta = 45°$

$F_R = 500\sqrt{3^2 + (2\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}$

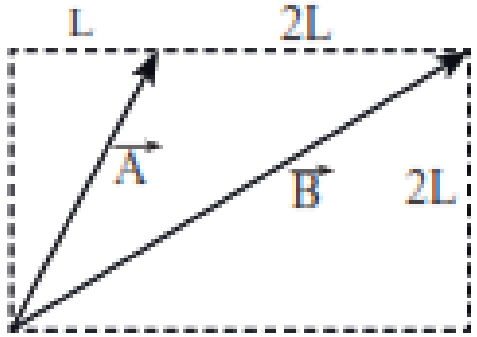
$F_R = 500\sqrt{9 + 8 + 12}$

$\therefore F_R = 500\sqrt{29}\ N$

Trilce ACADEMIA

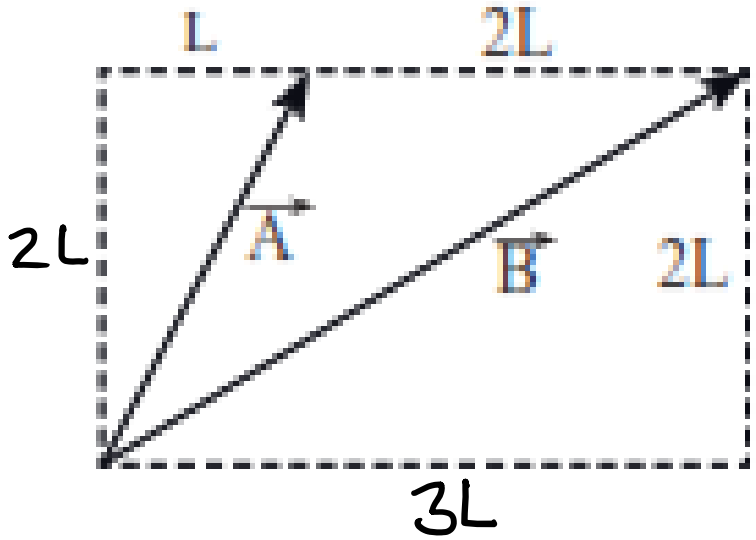
De la sem. (D)

44. La magnitud de la resultante del sistema mostrado es:



a) $L\sqrt{16}$ b) $2L\sqrt{2}$ c) $4L\sqrt{2}$
d) $L\sqrt{48}$ e) $5L\sqrt{2}$

Resolución:



Se ve:

$\vec{A} = (L; 2L)$

$\vec{B} = (3L; 2L)$ ⊕

$\vec{R} = (4L; 4L)$

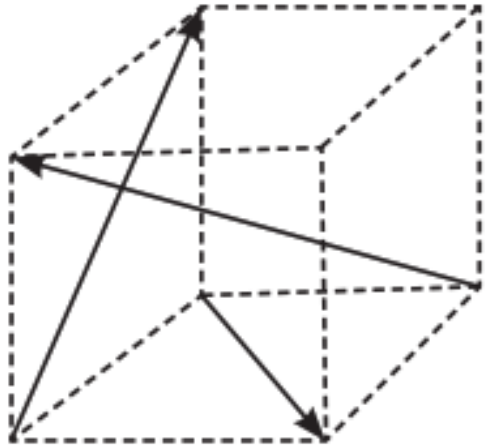
$\theta\theta$ $R = 4L\sqrt{1^2 + 1^2}$

$R = 4L\sqrt{2}$

Trilce ACADEMIA

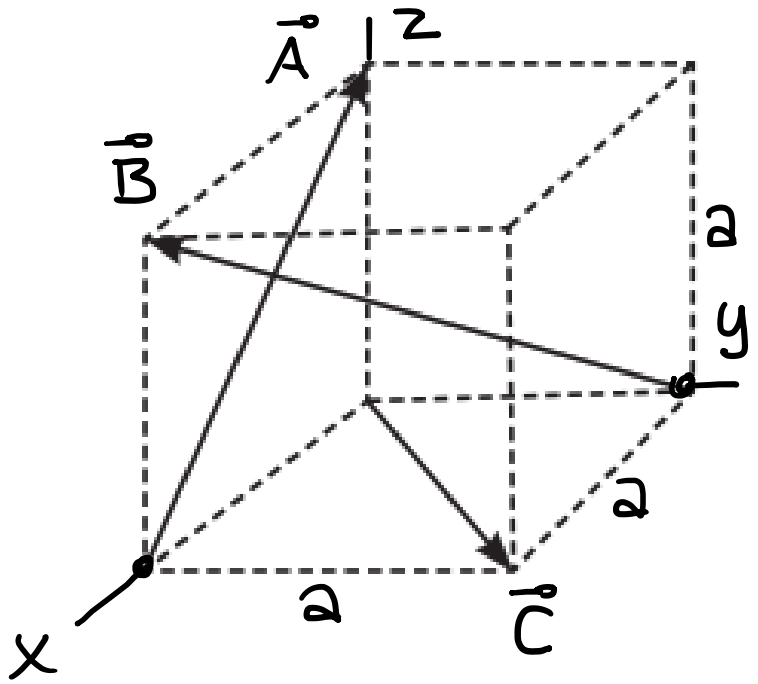
Anual UNI

141. Calcule el módulo de la resultante de los vectores mostrados, si la arista del cubo es "a".



a) a b) 2a c) $a\sqrt{3}$
d) $a\sqrt{5}$ e) $a\sqrt{6}$

Resolución:



Se ve:

$\vec{A} = (-a; 0; a)$

$\vec{B} = (a; -a; a)$

$\vec{C} = (a; a; 0)$ ⊕

$\vec{R} = (a; 0; 2a)$

$R = a\sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2}$

$R = a\sqrt{5}$

Trilce ACADEMIA

Trilce

ACADEMIA

MEJOR PREPARACIÓN A MENOR PRECIO